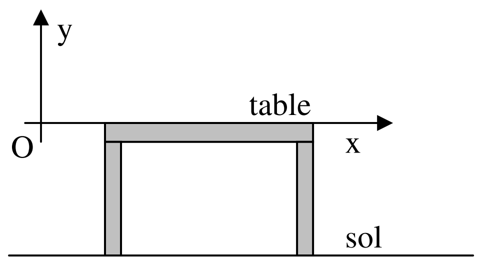
« Water bottle flip »

Le « water bottle flip » est un jeu d'adresse consistant à lancer une bouteille plastique partiellement remplie d'eau afin qu'elle se pose verticalement sur sa base sur une table placée à proximité. Il faut beaucoup s'entraîner pour réussir un « water bottle flip ». Initialement, la bouteille n'est tenue que par son col. Le mouvement ascendant du bras communique la vitesse juste suffisante à la bouteille. Tandis qu'elle monte puis redescend, celle-ci tourne sur elle-même.

Dans cet exercice, on se propose d'étudier le mouvement du centre de masse de la bouteille.
Le système considéré est l'ensemble { bouteille + eau } de masse m = 162 g dont on étudie le mouvement du centre de masse, noté G.
Le système évolue dans le champ de pesanteur terrestre $\vec{g}$ uniforme.
On fait l'hypothèse que l'action de l'air est négligeable.



Le mouvement est étudié dans le système d'axes (O, x, y) (cf. figure 1).

A la date t = 0 s, le centre de masse G est placé à l'origine du repère O et sa vitesse initiale, notée $\vec{v}_0$, a une direction faisant un angle α avec l'axe horizontal (Ox).

Recherche des conditions initiales sur la vitesse

Grâce à la vidéo montrant un lancer réussi, on a pu pointer la position du centre de masse G à différents instants.
Sur la figure 2, la durée entre deux positions successives est τ = 40 ms.
L'échelle est donnée par la bouteille dont la hauteur est 18,8 cm.

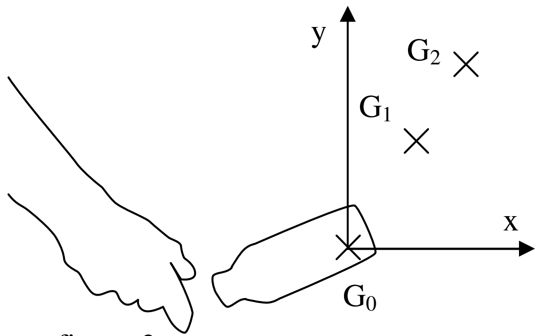


figure 2

chronophotographie du mouvement du centre de masse G lors du « water bottle

1 Représenter sur la copie, sans souci d'échelle, le système d'axes (O, x, y), le vecteur $\vec{v}_0$, l'angle α ainsi que les coordonnées v_{x0} et v_{y0} et l'allure de la trajectoire du centre de masse de la bouteille.

2 A partir des données expérimentales fournies et de la figure 2, vérifier que la valeur expérimentale v_0 du vecteur vitesse initial $\vec{v}_0$ est proche de 3,6 m.s^{-1}.

3 Proposer une méthode permettant de déterminer expérimentalement la valeur de l'angle α.

Modélisation du déplacement du centre de masse

4 En précisant la loi utilisée, donner les expressions des coordonnées du vecteur accélération $\vec{a}$ du centre de masse : a_x (t) et a_y (t).

5 En déduire les expressions des coordonnées v_x (t) et v_y (t) du vecteur vitesse du centre de masse et montrer que les équations horaires du mouvement sont :

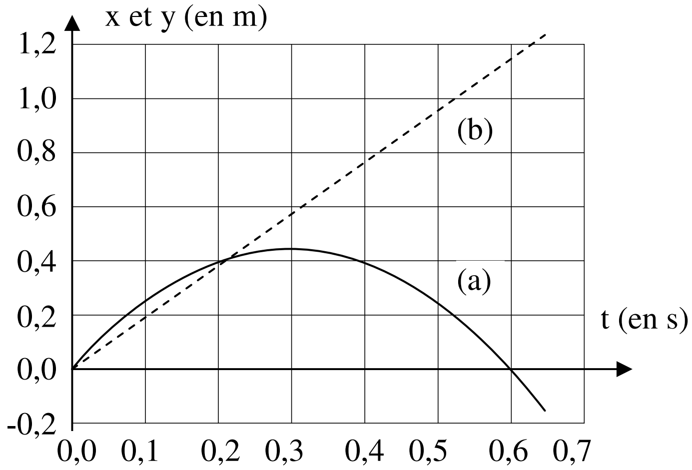
$$x(t) = v_0 * \cos(\alpha) * t \qquad y(t) = -\tfrac{1}{2} * g * t^2 + v_0 * \sin(\alpha) * t$$

Pour déterminer la distance à laquelle tombe la bouteille par rapport au point O, on crée un programme en langage python dont un extrait est présenté ci-dessous. Ce programme utilise les équations horaires modélisant le déplacement du centre de masse et les valeurs expérimentales :

$v_0 = 3{,}6\ m.s^{-1}$ $\alpha = 59°$ $g = 9{,}81\ m.s^{-2}$

```
5       g = 9.81 # Intensité du champ de pesanteur en m /s2
6
7       v0 = float(input('valeur de la vitesse initiale(en m/s) : v0 = ')
8       alpha = float(input('valeur de l'angle de tir(en degré) : alpha = ')
9
10      # Tracé des courbes horaires
11
12      t=np.linspace(0,0.65,100)
13      for i in t :
14              x = v0*cos(alpha*pi/180)*t   #calcul de x à la date t
15              y = -0.5*g*t**2+ ................ *t        #calcul de y à la date t
16
17      plt.plot(t,x,'k--',label='x en fonction de t')
18      plt.plot(t,y,'k',label='y en fonction de t')
19
```

L'exécution de ce programme permet d'obtenir le graphique ci-dessous qui modélise l'évolution des coordonnées (x, y), exprimées en mètre, du point G au cours du temps.



6 Associer chacun de ces tracés à x (t) et y (t).

7 Préciser ce qui est caché par les pointillés dans la ligne 15 du programme (expression ou valeur).

On estime que le centre de masse G se trouve à une hauteur voisine de 2 cm du fond de la bouteille lorsque celle-ci se pose sur la table.

8 Estimer la durée du mouvement de la bouteille obtenue par la modélisation.

La durée du mouvement de la bouteille lors de la réalisation de ce « water bottle flip » a été mesurée. On a obtenu $\Delta t = (0{,}50 \pm 0{,}05)$ s.

9 Proposer au moins une explication permettant de rendre compte de l'écart entre cette durée réelle et la durée obtenue par la modélisation.

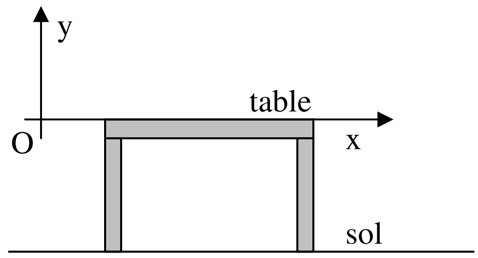
10 A l'aide du modèle, déterminer la distance à laquelle la bouteille tombe sur la table par rapport à l'origine du repère. Indiquer ce qu'il est possible de prévoir pour la distance réelle.

Corrigé

« Water bottle flip »

Le « water bottle flip » est un jeu d'adresse consistant à lancer une bouteille plastique partiellement remplie d'eau afin qu'elle se pose verticalement sur sa base sur une table placée à proximité. Il faut beaucoup s'entraîner pour réussir un « water bottle flip ». Initialement, la bouteille n'est tenue que par son col. Le mouvement ascendant du bras communique la vitesse juste suffisante à la bouteille. Tandis qu'elle monte puis redescend, celle-ci tourne sur elle-même.

Dans cet exercice, on se propose d'étudier le mouvement du centre de masse de la bouteille.
Le système considéré est l'ensemble { bouteille + eau } de masse m = 162 g dont on étudie le mouvement du centre de masse, noté G.
Le système évolue dans le champ de pesanteur terrestre $\vec{g}$ uniforme.
On fait l'hypothèse que l'action de l'air est négligeable.



Le mouvement est étudié dans le système d'axes (O, x, y) (cf. figure 1).

A la date t = 0 s, le centre de masse G est placé à l'origine du repère O et sa vitesse initiale, notée $\vec{v}_0$, a une direction faisant un angle α avec l'axe horizontal (Ox).

Recherche des conditions initiales sur la vitesse

Grâce à la vidéo montrant un lancer réussi, on a pu pointer la position du centre de masse G à différents instants.
Sur la figure 2, la durée entre deux positions successives est τ = 40 ms.
L'échelle est donnée par la bouteille dont la hauteur est 18,8 cm.

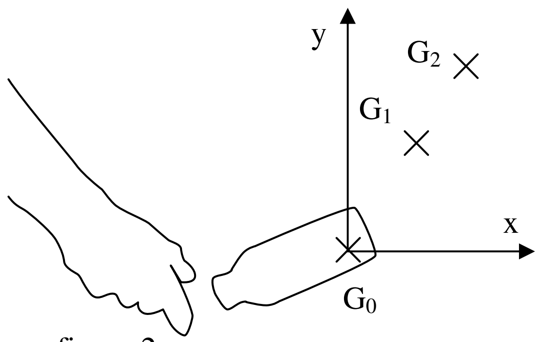
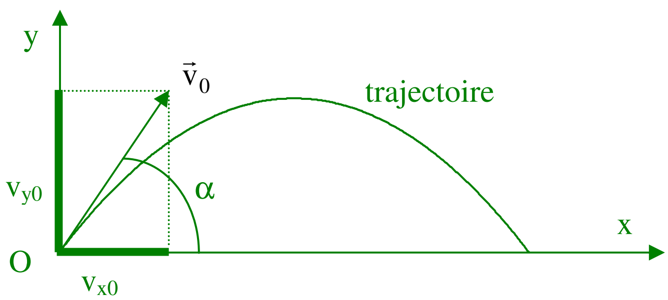


figure 2

chronophotographie du mouvement du centre de masse G lors du « water bottle

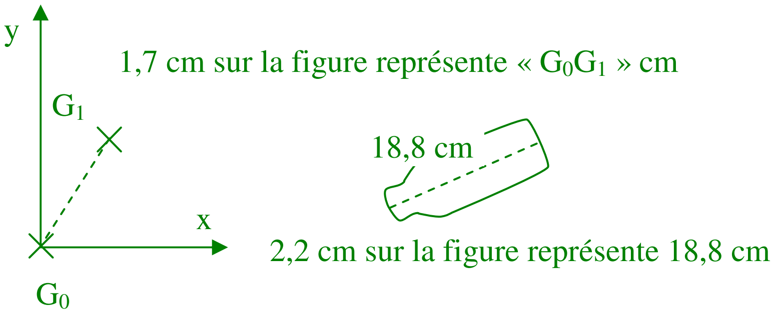
1 Représenter sur la copie, sans souci d'échelle, le système d'axes (O, x, y), le vecteur $\vec{v}_0$, l'angle α ainsi que les coordonnées v_{x0} et v_{y0} et l'allure de la trajectoire du centre de masse de la bouteille.



2 A partir des données expérimentales fournies et de la figure 2, vérifier que la valeur expérimentale v_0 du vecteur vitesse initial $\vec{v}_0$ est proche de 3,6 m.s^{-1}.

graphiquement :

$$G_0G_1 = \frac{1{,}7 * 18{,}8}{2{,}2} = 14{,}5 \text{ cm}$$



vitesse instantanée

$$\vec{v} = \frac{d\overrightarrow{OG}}{dt}$$

approximation de la vitesse instantanée

$$\vec{v} \simeq \frac{\Delta\overrightarrow{OG}}{\tau}$$

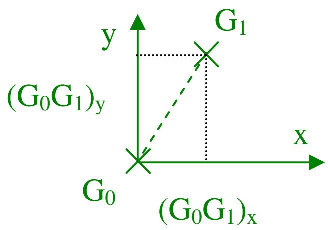
énoncé : la durée entre deux positions successives est τ = 40 ms

$$v \simeq \frac{G_0G_1}{\tau} = \frac{0{,}145}{40.10^{-3}} = 3{,}6 \text{ m.s}^{-1}$$

3 Proposer une méthode permettant de déterminer expérimentalement la valeur de l'angle α.

$$\alpha = \text{arcTan}\left(\frac{v_{y0}}{v_{x0}}\right) \simeq \text{arcTan}\left(\frac{(G_0G_1)_y}{(G_0G_1)_x}\right) = \text{arcTan}\left(\frac{1{,}41}{0{,}91}\right)$$

$\alpha \simeq 57°$



Modélisation du déplacement du centre de masse

4 En précisant la loi utilisée, donner les expressions des coordonnées du vecteur accélération $\vec{a}$ du centre de masse : a_x (t) et a_y (t).

2ème loi de Newton dans un référentiel terrestre supposé galiléen

$\Sigma\ \vec{F}_{ext} = m * \vec{a}$

$\vec{P} = m * \vec{a}$

$m * \vec{g} = m * \vec{a}$

$\vec{a} = \vec{g}$

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x(t) \\ a_y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -g \end{pmatrix}$$

5 En déduire les expressions des coordonnées v_x (t) et v_y (t) du vecteur vitesse du centre de masse et montrer que les équations horaires du mouvement sont :

$$x(t) = v_0 * \cos(\alpha) * t \qquad y(t) = -\tfrac{1}{2} * g * t^2 + v_0 * \sin(\alpha) * t$$

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x(t) \\ a_y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -g \end{pmatrix}$$

intégration

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_x(t) \\ v_y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_{x0} \\ -g*t+v_{y0} \end{pmatrix}$$

énoncé : vitesse initiale, notée $\vec{v}_0$, a une direction faisant un angle α avec l'axe horizontal (Ox)

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_x(t) \\ v_y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_0*\cos(\alpha) \\ -g*t+v_0*\sin(\alpha) \end{pmatrix}$$

intégration

$$\overrightarrow{OG} = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_0*\cos(\alpha)*t+x_0 \\ -\frac{1}{2}*g*t^2+v_0*\sin(\alpha)*t+y_0 \end{pmatrix}$$

à la date t = 0 s, le centre de masse G est placé à l'origine du repère O

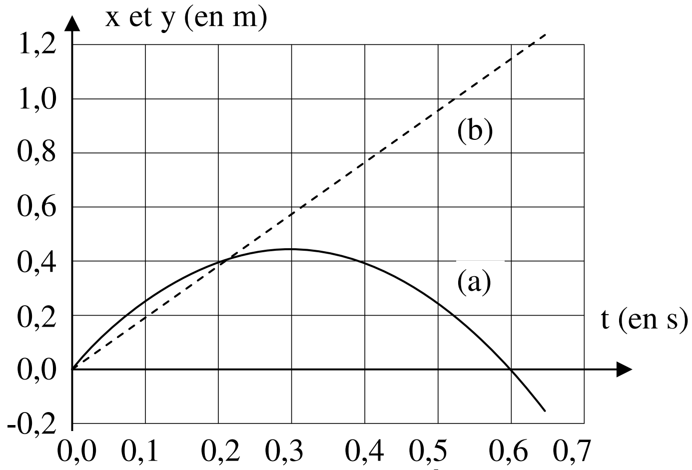
$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_0*\cos(\alpha)*t \\ -\frac{1}{2}*g*t^2+v_0*\sin(\alpha)*t \end{pmatrix}$$

Pour déterminer la distance à laquelle tombe la bouteille par rapport au point O, on crée un programme en langage python dont un extrait est présenté ci-dessous. Ce programme utilise les équations horaires modélisant le déplacement du centre de masse et les valeurs expérimentales :

$v_0 = 3{,}6\ m.s^{-1}$ $\alpha = 59°$ $g = 9{,}81\ m.s^{-2}$

```
g = 9.81 # Intensité du champ de pesanteur en m /s2

v0 = float(input('valeur de la vitesse initiale(en m/s) : v0 = ')
alpha = float(input('valeur de l'angle de tir(en degré) : alpha = ')

# Tracé des courbes horaires

t=np.linspace(0,0.65,100)
for i in t :
        x = v0*cos(alpha*pi/180)*t   #calcul de x à la date t
        y = -0.5*g*t**2+ ................ *t        #calcul de y à la date t

plt.plot(t,x,'k--',label='x en fonction de t')
plt.plot(t,y,'k',label='y en fonction de t')

```

L'exécution de ce programme permet d'obtenir le graphique ci-dessous qui modélise l'évolution des coordonnées (x, y), exprimées en mètre, du point G au cours du temps.



6 Associer chacun de ces tracés à x (t) et y (t).

question 5 : $x(t) = v_0 * \cos(\alpha) * t$
graphiquement x(t) = f (t) est une droite passant par l'origine du repère

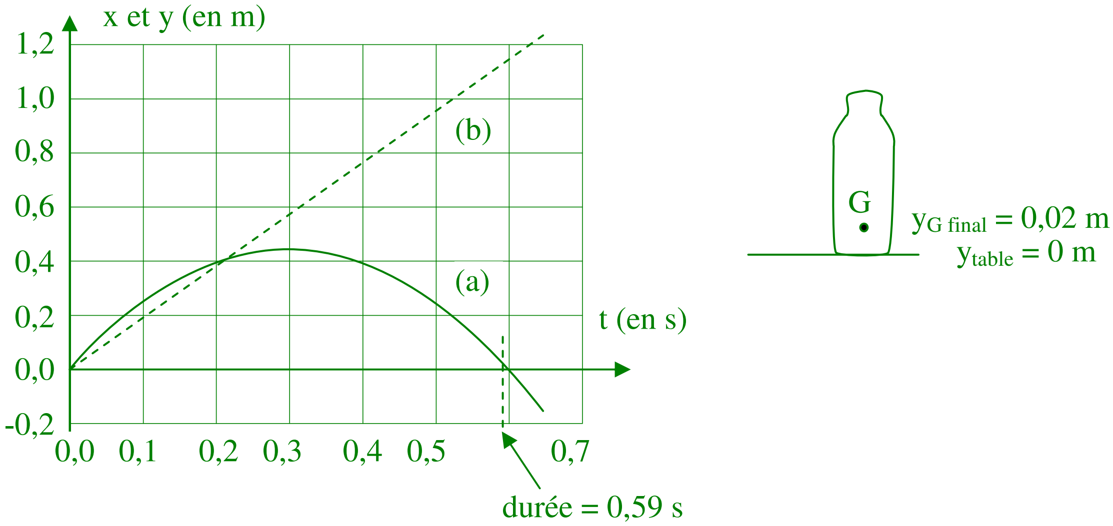
question 5 : $y(t) = -½ * g * t^2 + v_0 * \sin(\alpha) * t$
graphiquement y(t) = f (t) est une parabole passant par l'origine du repère

7 Préciser ce qui est caché par les pointillés dans la ligne 15 du programme (expression ou valeur).

en python les angles doivent être exprimés en radian
v0 * sin(alpha*pi/180)

On estime que le centre de masse G se trouve à une hauteur voisine de 2 cm du fond de la bouteille lorsque celle-ci se pose sur la table.

8 Estimer la durée du mouvement de la bouteille obtenue par la modélisation.



La durée du mouvement de la bouteille lors de la réalisation de ce « water bottle flip » a été mesurée. On a obtenu $\Delta t = (0{,}50 \pm 0{,}05)$ s.

9 Proposer au moins une explication permettant de rendre compte de l'écart entre cette durée réelle et la durée obtenue par la modélisation.

il y a probablement des frottements (entre la bouteille et l'air)

10 A l'aide du modèle, déterminer la distance à laquelle la bouteille tombe sur la table par rapport à l'origine du repère. Indiquer ce qu'il est possible de prévoir pour la distance réelle.

distance à laquelle la bouteille tombe sur la table par rapport à l'origine du repère à l'aide du modèle ($x(t) = v_0 * \cos(\alpha) * t$)
$x(0{,}59\ s) = v_0 * \cos(\alpha) * 0{,}59 = 3{,}6 * \cos(59°) * 0{,}59 = 1{,}1$ m

distance réelle estimée à laquelle la bouteille tombe sur la table par rapport à l'origine du repère
$x(0{,}50\ s) = v_0 * \cos(\alpha) * 0{,}50 = 3{,}6 * \cos(59°) * 0{,}50 = 0{,}93$ m